分内容.

三、坐标系与参数方程选做题常考点

考点一：三种形式方程的相互转化

例1. 已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{t},\\ y=t-\dfrac{1}{t}\end{cases}$ （t 为参数），若以直角坐标系的原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，求曲线 C 的极坐标方程.

解析：曲线方程 $\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{t},\\ y=t-\dfrac{1}{t}\end{cases}$ （t 为参数），可以化为 $x^2-y^2=(t+\dfrac{1}{t})^2-(t-\dfrac{1}{t})^2=4$，即 $x^2-y^2=4$. 利用 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 可以得曲线 C 的极坐标方程为 $(\rho\cos\theta)^2-(\rho\sin\theta)^2=4$，即 $\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=4$，整理得：$\rho^2\cos2\theta=4$.

【点评】本题考查参数方程与极坐标方程的相互转化.先将参数方程化为普通方程，再转化为极坐标方程.消去参数，将参数方程转化为平面直角坐标系方程，利用 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 将普通方程转化为极坐标方程是解决此类题目的一般思路，在转化的过程中，需要特别关注参数的取值范围.

变式训练1：已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\sqrt{5}\cos\alpha,\\ y=1+\sqrt{5}\sin\alpha\end{cases}$ （α 为参数），以直角坐标系原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求曲线 C 的极坐标方程；

(2) 设 l_1：$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，l_2：$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，若 l_1、l_2 与曲线 C 相交于异于原点的两点 A、B，求△AOB 的面积.

解析：(1) ∵ 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\sqrt{5}\cos\alpha,\\ y=1+\sqrt{5}\sin\alpha\end{cases}$ （α 为参数），

∴ 曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 代入并化简得：$\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$，

即曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$.

(2) 在极坐标系中，C：$\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$，

∴ 由 $\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{6},\\ \rho=4\cos\theta+2\sin\theta,\end{cases}$ 得到 $|OA|=2\sqrt{3}+1$.

同理 $|OB|=2+\sqrt{3}$. 又 ∵ $\angle AOB=\dfrac{\pi}{6}$，∴ $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin\angle AOB=\dfrac{8+5\sqrt{3}}{4}$.

即△AOB 的面积为 $\dfrac{8+5\sqrt{3}}{4}$.

考点二：直线参数几何意义及极径的应用

例2. 已知直线 l：$x+y-1=0$ 与抛物线 $y=x^2$ 相交于 A，B 两点，

(1) 求直线 l 的参数方程；

(2) 求线段 AB 的长度和点 $M(-1,2)$ 到 A，B 两点的距离之积.

解析：(1) 因为直线 l 过定点 M，且 l 的倾斜角为 $\dfrac{3\pi}{4}$，所以它的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+t\cos\dfrac{3\pi}{4},\\ y=2+t\sin\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$ （t 为参数），即 $\begin{cases}x=-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ （t 为参数）.

(2) 将 (1) 的直线 l 的参数方程代入抛物线的方程，得 $t^2+\sqrt{2}t-2=0$，

由参数 t 的几何意义可知 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-4\times(-2)}=\sqrt{10}$，

$|MA|\cdot|MB|=|t_1t_2|=2$.

【点评】本题考查直线的参数方程及直线参数方程参数 t 的几何意义，直线的参数方程在交点问题应用时要注意参数方程应该化为标准形式（参数前的系数平方之和应该为1）才能应用参数的几何意义.

变式训练2：在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\sqrt{5}\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$ （α 为参数）. 在以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C_2：$\rho^2+4\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+4=0$.

(1) 写出曲线 C_1，C_2 的普通方程；

(2) 过曲线 C_1 的左焦点且倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的直线 l 交曲 C_2 线于 A，B 两点，求 $|AB|$.

解析：(1) 由 $\begin{cases}x=2\sqrt{5}\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha,\end{cases}$ 得 $(\dfrac{x}{2\sqrt{5}})^2+(\dfrac{y}{2})^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

即曲线 C_1 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

∵ $\rho^2=x^2+y^2$，$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

曲线 C_2 的方程可化为 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$.

即 C_2：$(x+2)^2+(y-1)^2=1$.

(2) 曲线 C_1 左焦点为 $(-4,0)$，

直线 l 的倾斜角为 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，$\sin\alpha=\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以直线 l 的参数方程为：$\begin{cases}x=-4+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ （t 为参数）.